

# 模型飛行機に関する解析的な試み

## - ダイナミックソアリングの最適軌道 -

高崎浩一

Analytical and computational studies on a model airplane

Koichi TAKASAKI (koichi.takasaki@nifty.ne.jp)

*Key Words: model glider, optimal trajectory, dynamic soaring, thermal soaring*

### Abstract

The computer analysis of optimal trajectories of a F3B class model glider performing dynamic soaring was done. The results obtained from the each conditions are described.

- 1) Wind gradient along z-axis, no constraint on the initial and final position;
- 2) Wind gradient along z-axis, with constraint on the initial and final position;
- 3) Flight within a thermal current, no constraint on the flight attitude, with constraint on the initial and final conditions;
- 4) Flight within a thermal current, with constraint on the maximum bank angle and the initial and final conditions.

### 1. はじめに：RCグライダーのダイナミックソアリング最適軌道解析について

ダイナミックソアリングとは、定常上昇風ではなく、空間方向の速度分布を積極的に利用してエネルギーを得る滑翔法で、エネルギー獲得のためには必然的に非定常な操縦を必要とすることがその名前の由縁である。近年まではその飛行は滑空性能の良い海鳥でなければ不可能ともいわれてきたが、海外においてはRCグライダーでも可能であることが既の実証されている。<sup>2)</sup>

通常はサーマル/スロープソアリングにおける定常飛行と区別を付けるために水平方向の気流を利用する例が多いが、後に示される計算例では通常のサーマル型の垂直方向風速分布を用いてもダイナミックソアリングを利用した飛行が可能であることが、計算上であるが示された。

以下の条件について最適軌道解析を行なったので、各例について報告する。

- 1) 水平方向速度が高度に比例して変化する場合（終端時間での位置の拘束条件無し）
- 2) 水平方向速度が高度に比例して変化する場合（終端時間位置 / 速度 = 開始時間位置 / 速度）
- 3) サーマル中の飛行（飛行姿勢の拘束条件無し，終端時間位置 / 速度 = 開始時間位置 / 速度）
- 4) サーマル中の飛行（最大バンク角の拘束条件有り，終端時間位置 / 速度 = 開始時間位置 / 速度）

主な記号：

$C_L$	：揚力係数	$C_D$	：抗力係数
$m$	：機体質量	$g$	：重力加速度
$S$	：主翼面積	$\rho$	：空気密度
	：機体ピッチ角		：機体方位角
	：機体バンク角	$V_{1,2,3}$	：x/y/z方向速度（z方向は下向き正）

#### 1.1 解析手法

解析に使用したプログラムは文献1に基づいて作成されたもので、初期条件と終端条件を与えられた微分方程式について、ある評価関数を最小にする、2点境界値問題を解く手法の一種である。

具体的には、

評価関数

$$J[\mathbf{u}(t), \sigma, \alpha] = \phi[\mathbf{x}(t_f)] + \int_{t_0}^{t_f} L[\mathbf{x}, \mathbf{u}, \alpha, t] dt \quad (1)$$

を、次の拘束条件のもとで最小化する。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \alpha, t) \quad \text{for } t \in [t_0, t_f] \quad (2a)$$

$$\mathbf{x}_i(t_0) = \begin{cases} \sigma_i, i = 1, 2, \dots, k(\text{unspecified}) \\ \mathbf{x}_{0i}, i = k+1, k+2, \dots, n(\text{given}) \end{cases} \quad (2b)$$

$$\Psi[\sigma_i, \mathbf{x}(t_f)] = 0 \quad (2c)$$

(x:n次元状態変数ベクトル, u:m次元制御入力ベクトル, α:任意パラメータベクトル, t:時間)

ただし時間積分スキームと直線探索アルゴリズムは文献1とは異なる物を用いている。

また、全ての解析例において未知の終端時間 $t_f$ はパラメータベクトルαに組み入れている。

解析モデルの対象は3次元空間内を飛行するグライダーで、スケールはF3Bクラスを想定している。

S=0.58sq.m, m=2.4kg である。

運動方程式は以下ようになる。

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{V}_3 \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 \frac{\rho S}{m} [V^2 (C_D \cos \theta \cos \psi) + C_L (\cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi)] \\ -0.5 \frac{\rho S}{m} [V^2 (C_D \cos \theta \sin \psi) + C_L (\cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi)] \\ -0.5 \frac{\rho S}{m} [V^2 (-C_D \sin \theta) + C_L (\cos \phi \cos \theta)] + g \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (3a)$$

$$\left( \begin{array}{l} \cos \psi = \frac{V_x}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}}, \sin \psi = \frac{V_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}} \\ \cos \theta = \frac{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}, \sin \theta = \frac{-V_z}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}} \\ V_x = V_1 - Vw_1, V_y = V_2 - Vw_2, V_z = V_3 - Vw_3 \\ C_D = 0.009278 - 0.009652 C_L + 0.022288 C_L^2 \end{array} \right) \quad (3b)$$

( $C_L$ , : 制御入力,  $Vw_{1,2,3}$ : 各点における風速のx,y,z方向成分)

## 2. 数値解析例

2.1 例1: 水平方向速度が高度に比例して変化する場合(終端時間での位置の拘束条件無し)

これはアホドリなどが海面上で行うダイナミックソアリングの条件として知られており、実際海外でも解析例がある。最適化に関する各条件を次に示す。この例では $C_L$ に±1.4の上下限をつけている。

$$\text{拘束条件: } V_1(t_0) = V_1(t_f), V_2(t_0) = V_2(t_f), V_3(t_0) = V_3(t_f) \quad (4a)$$

$$\text{評価関数: } \int_{t_0}^{t_f} V_3 dt \quad (4b)$$

$$\text{風速分布: } Vw_2 = -0.1z \quad (4c)$$

機体の軌跡を図1に示す。図から、よく文献でも見られるようなジグザクの軌跡になっていることが分かる。図の中央では揚力係数は最大で、バンク角は右80°に達している。逆に両端では速度最大、左バンクを

とっており、相対的に風を受ける方向に腹を向けて揚力係数を上げるという、この後の解析でも見られるパターンをとっている。

## 2.2 例2：水平方向速度が高度に比例して変化する場合（終端時間位置/速度 = 開始時間位置/速度）

先ほどの条件の場合は距離を稼ぐ飛行の場合には都合が良いが、RCのように一ヶ所で飛ばす場合には不適である。よって、終端時間における位置を開始時間の位置に拘束した場合の解析を行った。

なお、計算を確実にこなうためにバンク角には左方向のみの拘束を付加している。

$$\text{拘束条件： } x(t_0) = x(t_f), y(t_0) = y(t_f) \text{ および (4a) (5a)}$$

$$\text{評価関数，風速分布： (4b) および (4c) と同様 (5b), (5c)}$$

機体の軌跡を図2に示す。図から、閉ループ状の軌跡でも地面境界層を用いたダイナミックソアリングは解析上は可能であると言える。

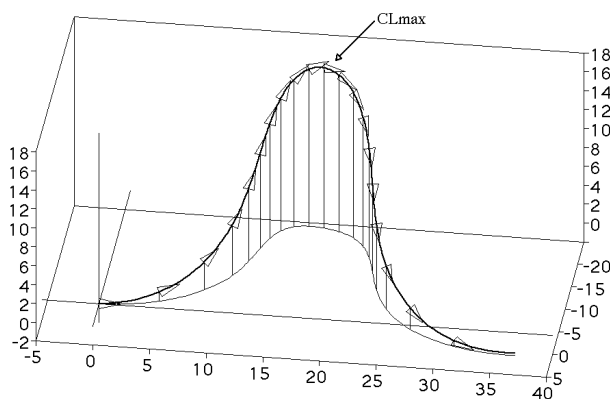


図1 機体の軌跡（例1）

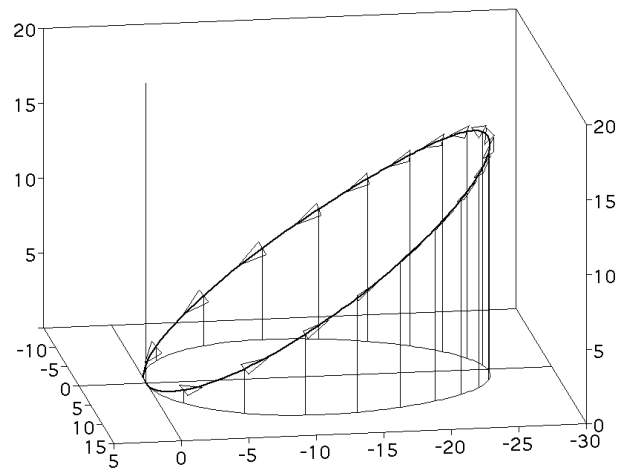


図2 機体の軌跡（例2）

## 2.3 例3：サーマル中の飛行（飛行姿勢の拘束条件無し，終端時間位置/速度 = 開始時間位置/速度）

著者は文献3において、サーマル旋回の離脱においては経験則でいわれているとおり、サーマルの中心を突っ切るように脱出するのが最適であるという解を得ている。この例は、サーマル中の定常旋回はどのように行うのが最適であるかの解析である。サーマル分布は文献3と同様の分布（式(6c)）とした。なお、速度に関して5m/sec以上となるようにペナルティ関数を付加した。また、当然だがz位置には終端拘束条件はつけない。

$$\text{拘束条件： } V_1(t_0) = V_1(t_f), V_2(t_0) = V_2(t_f), V_3(t_0) = V_3(t_f), x(t_0) = x(t_f), y(t_0) = y(t_f) \text{ (6a)}$$

$$\text{評価関数： } \int_{t_0}^{t_f} V_3 dt \text{ (6b)}$$

$$\text{風速分布： } V_{w3} = -2.0 * \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{15^2}\right) \text{ (6c)}$$

解析結果の軌道を図3に示す。軌道はサーマル中心において直線的にズームアップする軌道を両端で急旋回でつなぎ合わせたような物になっている。急旋回部分のバンク角は120°以上となっており、完全に垂直旋回以上である。これはエネルギーの観点からいえば、相対的に下降気流となる部分で機体の腹を上に向けるという点で合理的な物と思われる。この飛行法の考察については後述する。

また、このようなサーマルを利用したダイナミックソアリング利用法は、実機グライダーでもドルフィン飛行というテクニックですでに使用されていると考えられる。

## 2.3 例4：サーマル中の飛行（最大バンク角拘束条件有り，終端時間位置/速度 = 開始時間位置/速度）

先の例にバンク角30°以内の制限をつけた例について同様に解析を行った。拘束条件，評価関数，風速分布

は先の例と同じである。

解析結果の軌道を図4に示す。先の例と同様，サーマル中心点において揚力係数および速度を挙げてズームアップする挙動が見られる。サーマル中心位置の前後においてほぼ対称にズームアップする点も見られるが，これはヒュゴイドモードを用いてサーマル中心点での速度をより増すための操作ではないかと考えられる。

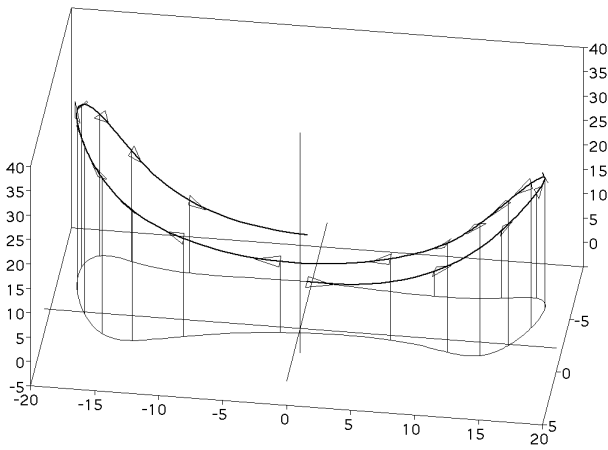


図3 機体の軌跡(例3)

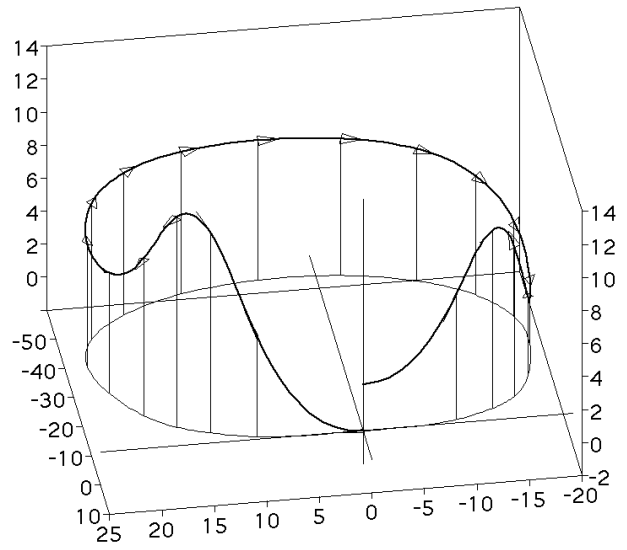


図4 機体の軌跡(例4)

### 3. 考察

以上，ダイナミックソアリングの数値解析について4例を示したが，ほぼ共通して言えることは，相対的に風速のあるところで風を腹に受け，揚力係数を増大させ，しかも速度を出しているということである。この点については以下のように説明できる。

今右図のように速度 $V_0$ で飛行している場合，機体下面から相対的に $V_w$ の風を受けたとする。誘導抗力の発生と同じ原理で，揚力ベクトルが傾くために機体前方に推進力が生まれる。

この推進力から得られるパワーは

$$\begin{aligned} \Delta P &= \Delta T \cdot V \\ &= \frac{1}{2} \rho V^3 S C_L \Delta \alpha \left( 1 - \frac{2 C_{L\alpha}}{\pi AR} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

相対風 $V_w$ に流されるまでの目安となる時間は

$$\bar{t} = \frac{V_w}{\Delta L / m} = \frac{m}{\frac{1}{2} \rho V^2 C_{L\alpha} \Delta \alpha S} \quad (9)$$

よって，単位質量当たり得られるエネルギーは

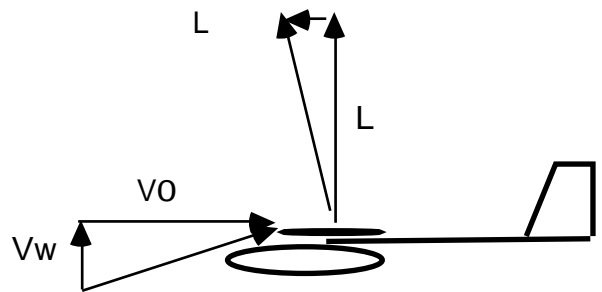
$$\Delta e = \frac{\Delta P \cdot \bar{t}}{m} = V_w \cdot V \cdot C_L \left( \frac{1}{C_{L\alpha}} - \frac{2}{\pi AR} \right) \quad (10)$$

(10)式から，速度 $V$ ，揚力係数 $C_L$ ，アスペクトレシオ $AR$ が大きいほど有利であることがわかる。しかしこれは一方で主翼構造にとっては非常に厳しいもので，実現できる機体は限られると考えられる。また，式には明示されていないが，一般的にみれば翼面荷重の大きな機体が有利である事も読み取れる。これらのことは，自然界では海鳥にダイナミックソアリングが見られ，またRC界ではF3Bクラスの機体で行われていることを裏付けている。

また，相対風からエネルギーを得られるだけの目安となる距離は

$$\bar{l} = V \cdot \bar{t} = \frac{1}{\frac{1}{2} \rho C_{L\alpha}} \frac{m}{S} \quad (11)$$

となり，翼面荷重に比例することがわかる。このことは，相対風のスケールが大きいほど高翼面荷重機が有利であり，一方逆に相対風のスケールが小さいほど低翼面荷重機が有利であることがわかる。



## 参考文献

1. B.L.Pierson , Panel flutter optimization by gradient projection, International journal for numerical methods in engineering , VOL.9. , 271-296
2. Radio Carbon Art, Endless Lift 2 (VHS ビデオテープ): <http://www.radiocarbonart.com/>
3. 高崎浩一 , モデルグライダーについての解析的な試み , 第 5 回スカイスポーツシンポジウム